872. D'Amore B. (2015). Prefazione a: Salvucci L. (editor) (2015). *Strumenti per la didattica della matematica. Ricerche, esperienze, buone pratiche*. Milano: Franco Angeli. 13-36. ISBN: 978-88-204-2024-6.

Prefazione

di Bruno D'Amore[1]

Questo libro prende le mosse da un convegno nazionale sulla didattica della matematica, destinato alla formazione degli insegnanti, che si svolse nella splendida e magica cornice dell'Abbazia di Santa Maria di Chiaravalle di Fiastra, Tolentino, provincia di Macerata, il 19 maggio 2009, organizzato dall'amica Luciana Salvucci, dirigente scolastico, ma soprattutto poetessa di notevole profondità.

Il convegno e i successivi Atti, in parte oggetto di questa pubblicazione, furono strumento di studio e ricerca, oltre che di un gruppo di insegnanti della provincia, anche di un progetto Comenius, come sarà descritto in modo dettagliato nel corso del testo.

Come in tutti i convegni che si rispettano, ognuno degli oratori fece il proprio intervento sulla base delle proprie inclinazioni e prerogative; io decisi, in quella occasione, di puntare sulla divulgazione della matematica, come apertura di carattere culturale; Martha Fandiño fece un breve intervento specifico di didattica della matematica.

Con il trascorrere del tempo, Luciana con pazienza e perseveranza curò il testo che raccoglie gli interventi del convegno, aggiungendone però altri suoi e di tanti altri Autori, sui temi più disparati che ruotano attorno ai pro-

[1] NDR, Dipartimento di Matematica Università di Bologna; Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotà, Colombia, Doctorado de Investigación.

cessi di insegnamento – apprendimento della matematica, trasformandolo in un libro dai mille volti, che la vede come editor e che sale ora alla luce. E mi chiese di scrivere una prefazione abbastanza lunga e ricca di contenuti di carattere didattico, cosa che accettai di fare in vista di un uso strumentale del libro, nelle mani degli insegnanti che vorranno sfogliarlo.

Decisi dunque di riprendere i temi di base, classici, della didattica della matematica per darne una presentazione molto elementare.
La mia speranza è che queste riflessioni iniziali servano allo scopo che io auspico, quello di avviare il lettore insegnante verso uno studio più approfondito di queste importanti questioni.

0. Scopo del seguente testo

L'attuale ricerca in didattica disciplinare sembra tutta tesa ad accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento (anche se la psicologia cognitiva in questo momento sembra la più autorevole candidata al ruolo di organizzatrice fondazionale per molte esperienze di ricerca).

Affrontando la didattica disciplinare come epistemologia dell'apprendimento, farò esempi nel campo che mi compete, cioè in quello della matematica. Discussioni con colleghi, didatti di altre discipline e letture occasionali, però, mi danno conferma del fatto che le problematiche generali sembrano essere le stesse, anche nelle diverse specificità. Per cui, pur non volendo (potendo) uscire dallo stretto ambito detto, sono convinto che non troppo diversi sarebbero i possibili analoghi resoconti critici di appartenenti ad altri settori di ricerca.

Quel che farò qui è presto dichiarato. Analizzerò alcune tra le problematiche che sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca in didattica della matematica, e che mi sembrano fornire appigli solidi e significativi per una possibile generalizzazione. Mi asterrò da presentazioni troppo tecniche e mi limiterò dunque solo alla posizione di ogni singolo problema proposto, passando in rassegna, nei prossimi paragrafi, alcune tematiche molto diffuse nell'ambiente di ricerca e che sembrano essere di particolare interesse per gli insegnanti.

1. Il contratto didattico

Fin dagli anni ’70 fece l’ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l’idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau (1986), che si rilevò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni ’80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni ’80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l’idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall’intera comunità internazionale.

Questa idea, di spirito tutto francese,[2] non era del tutto nuova. Nel 1973, Jeanine Filloux introdusse il termine di *contratto pedagogico* per definire alcuni tipi di rapporto tra docente ed allievo. Quello della Filloux era un contratto generale, più sociale che cognitivo, mentre il contratto didattico di Brousseau tiene conto anche delle conoscenze in gioco. Il primo tentativo di “definizione” del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d’insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l’allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l’accesso a questo compito si fa attraverso un’interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall’allievo ed i comportamenti dell’allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1986).

Spesso queste “attese” non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.
Qualche esempio.
Es. 1 (concezione della scuola): L'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa (per esempio sulle altezze di un triangolo), l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo; non scriverà affatto “liberamente” ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella 'corretta', cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante.
Es. 2 (concezione della matematica): Lo studente ritiene che in matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la risposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a

[2] Sto pensando a Jean-Jacques Rousseau ed al suo *Contrat social* (1762).

disagio e tende a far uso dei dati numerici per dare comunque una risposta formale.
Es. 3 (ripetizione delle modalità): Per tre lunedì consecutivi l'insegnante di matematica fa svolgere esercizi alla lavagna; da quel punto in poi l'allievo sa che ogni lunedì sarà così; una modifica al programma atteso genera sorpresa. Lo stesso vale, per esempio, quanto all'attesa del programma possibile nel corso di un'interrogazione: se l'insegnante ha sempre e solo fatto domande sul programma svolto nelle ultime lezioni, non può, a detta dello studente, fare domande su argomenti oggetto di lezione in un passato più remoto...

Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano*; io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente (D'Amore, 1993a). In una classe IV primaria (età degli allievi 9-10 anni), ho proposto il celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».
In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità) (D'Amore, Sandri 1993), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti (una ed una sola volta), e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...

Con l'espressione *effetto «età del capitano»* si designa oggi il comportamento di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica.

Naturalmente, il "caso" non è esclusivo della scuola primaria ma, mutando quel che c'è da mutare, interessa ogni ordine di scuola.

Tale effetto rientra tra quelli cosiddetti di *rottura* del contratto didattico: se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, a rompere il contratto e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare, pur di non osare in prima persona.

Studi approfonditi sul contratto didattico hanno permesso di rivelare appunto che i bambini ed i ragazzi hanno attese particolari, schemi generali, comportamenti che nulla hanno a che fare *stricto sensu* con la matematica, ma che dipendono dal contratto didattico instaurato in classe.

In D'Amore (1993b), racconto una curiosa esperienza basata sul testo seguente, dato in una scuola elementare a diverse classi:
«I 18 allievi di seconda vogliono fare una gita di un giorno da Bologna a Verona. Devono tener conto dei seguenti dati:
- due di essi non possono pagare;
- da Bologna a Verona ci sono 120 km;
- un pulmino da 20 posti costa 200.000 lire al giorno più 500 lire al chilometro (compresi i pedaggi autostradali).

Quanto spenderà ciascuno?».

Inutile dire che si tratta di un problema complesso, che si voleva realmente effettuare la programmazione di una gita, che gli studenti avrebbero dovuto discutere del problema e cercare la risoluzione in gruppo eccetera.

Di fatto, la stragrande maggioranza degli studenti, di fronte alla risoluzione di questo problema, commette un errore ricorrente: non tiene conto del viaggio di ritorno e calcola dunque la spesa totale con l'espressione errata: $500\times120 + 20000$.

Su questo punto c'è una vasta bibliografia che tende a giustificare questo fatto. Una delle giustificazioni più ricorrenti è una sorta di… dimenticanza strategica o affettiva: l'andata di una gita è emotivamente un momento forte, il ritorno no.

Per cercare di capire meglio la questione, spezzai il problema in varie componenti o fasi, con tante "domandine" parziali specifiche; ma l'errore si ripeteva. Suggerii allora ad alcuni insegnanti di far mimare le scene

dell'andata e del ritorno, di disegnare i vari momenti della gita. Il caso incredibile che trovai e che descrissi in D'Amore (1993b) è quello di un bambino che ha disegnato il pullman sotto una doppia freccia:
in una c'è scritto «Bologna → Verona 120 km», nell'altra «Verona → Bologna 120 km», dunque c'è perfetta consapevolezza del fatto che in una gita ci sono andata e ritorno; ma poi quello stesso bambino, al momento di risolvere, utilizza di nuovo solo il dato per l'andata.

Una delle giustificazioni più presenti date dai bambini nelle interviste è che essi non si sentono autorizzati ad usare un dato che esplicitamente non appare nel testo. Conta poco il senso della richiesta contenuta nei problemi di Matematica, quel che conta è far uso dei dati numerici esplicitamente proposti come tali. Uno dei bambini, intervistato, dichiara: «Se tu volevi calcolare anche il ritorno, dovevi dirlo»; è evidente la lacuna che il bambino avverte: in nessuno dei dati appare lecito raddoppiare la spesa per il percorso chilometrico.

Sempre legato al contratto didattico, risulta molto interessante leggere l'atteggiamento degli studenti di fronte al seguente celebre problema di Alan Schoenfled (1987a):
«Un bus dell'esercito trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati in bus al campo d'addestramento, quanti bus devono essere usati?».
Dei 45000 allievi quindicenni studiati negli USA da Schoenfeld, solo meno di un quarto (il 23%) è riuscito a dare la risposta attesa: 32. Il ricercatore statunitense afferma quindi che pochissimi studenti sono in grado di rileggere il senso della domanda, osando di scrivere 32, di fatto non ottenuto formalmente nell'operazione, e propone come causa di questo comportamento questioni relative a fatti metacognitivi.

A distanza di parecchi anni, recentemente abbiamo voluto analizzare di nuovo la stessa situazione (D'Amore, Martini, 1997) ed abbiamo trovato alcune novità. La prova è stata fatta a vari livelli scolastici lasciando libertà agli studenti di usare o no la macchina calcolatrice. Abbiamo avuto molte risposte del tipo: 31,333333 soprattutto da parte di chi usava la macchina calcolatrice; altre risposte: $31,\overline{3}$ e 31,3.

Il controllo semantico, quando c'è, porta qualcuno a scrivere 31 (gli autobus «non si possono spezzare»), ma ben pochi si sentono *autorizzati* a scrivere 32. Tra chi usa la macchina calcolatrice, poi, si ha lo 0% di risposte "32".

Lo studente non si sente autorizzato a scrivere quel che non appare: se anche fa un controllo semantico sugli autobus come oggetti non divisibili in parti, ciò non lo autorizza a scrivere 32; c'è addirittura chi non si sente autorizzato neppure a scrivere 31; non si può parlare semplicemente di "errore" da parte dello studente, a meno che non si intenda per errore l'incapacità di controllare, una volta ottenuta la risposta, se essa è semanticamente coerente con la domanda posta; ma allora scatta un altro meccanismo: lo studente non è disposto ad ammettere di aver fatto un errore e preferisce parlare di "trucco", di "trabocchetto"; per lo studente un errore matematico o in matematica, è un errore di calcolo o assimilabile ad esso, non di tipo semantico.

Un lungo e sistematico studio su questa prova, eseguito anche attraverso numerose interviste agli studenti, rivela che "il colpevole" di questo comportamento è una clausola del contratto didattico, alla quale abbiamo dato il nome di "clausola di delega formale". Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare ed i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di *delega formale*: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, *tanto più* se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che … disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico.

Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissimi anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

2. Conflitti e misconcezioni

Un altro argomento di studio in didattica della matematica che sta emergendo con estrema forza e grande rilievo riguarda i *conflitti cognitivi*. Si tratta di questo: lo studente può nel tempo aver assunto un concetto ed essersene fatto un'immagine; questa immagine può essere stata rinforzata nel tempo da prove, esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.

Si crea così *conflitto* tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.

Legata alle idee di "immagine di un concetto" e "conflitto", c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*. Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.

Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.

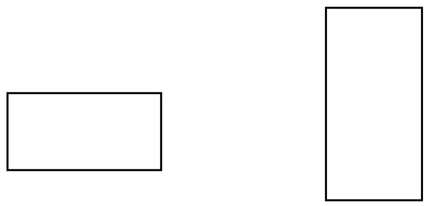
Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curricolo nascosto. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Se l'insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curricolo quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato.

Per esempio, in una III primaria, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

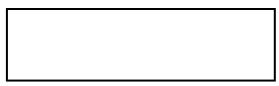
37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
----	----	----	----
13	22	12	13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state risolte correttamente, diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza, a "prendere in prestito una decina". Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi, la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curricolo quella "regola". Essa funzionava *quasi* sempre e nei casi negativi egli non capiva perché: stava usando *correttamente*, infatti, una regola che non sapeva essere invece scorretta. Una vera e propria misconcezione.

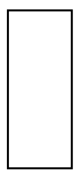
Qualche esempio.
Es. 1: Lo studente ha sempre visto immagini di rettangoli con lati (base ed altezza) di lunghezza diversa (anche se nella definizione proposta si parla solo di parallelogrammi con angoli retti). Egli ha allora assunto come immagine-prototipo del rettangolo una figura che *deve* avere base ed altezza diverse.



Un giorno l'insegnante analizza un po' più a fondo da un punto di vista logico la definizione di rettangolo, a partire dal parallelogramma, e mostra come la richiesta riguardi solo l'ampiezza dei quattro angoli interni (che devono essere tutti retti) e quindi non esclude il caso del quadrato, pensato come un rettangolo che però ha base ed altezza di ugual lunghezza. Nasce, o, meglio, può nascere un conflitto cognitivo, legato al prototipo di figura attesa (e confermata dall'esperienza), tra l'immagine di rettangolo (che esclude il quadrato) e la nuova immagine proposta.
Es. 2: Uno studente di I primaria aveva sempre visto disegnare un rettangolo "appoggiato" sulla base orizzontale e con l'altezza, verticale, più corta; si era dunque fatto un'immagine del concetto "rettangolo" siffatta e tale immagine era sempre stata confermata dall'esperienza:



Un bel giorno gli venne proposta un'immagine di rettangolo che ha la base sì orizzontale (e dunque l'altezza verticale), ma la base è più corta dell'altezza:



Significativa la denominazione che il bambino diede spontaneamente, per adeguare il concetto già assunto all'immagine nuova, definendo questa "nuova forma" come «rettangolo in piedi».

Si riconosce in questa denominazione spontanea l'esito felice di un conflitto cognitivo tra una misconcezione (immagine che sembrava stabile di "rettangolo" e che invece era ancora in via di sistemazione) e la nuova immagine proposta sapientemente dall'insegnante.

Gli esempi potrebbero continuare a lungo, ma ritengo che questi possano bastare.

Dunque, il conflitto cognitivo è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti, o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.

Ma il conflitto può anche essere sociale. Supponiamo cioè che lo studente abbia un'immagine o un concetto su un certo argomento e che ritenga si tratti di quello condiviso da tutta la classe (o, più in generale, da tutta la società); un bel giorno tale immagine o tale concetto entra in conflitto con quello proposto dall'insegnante e/o da una nuova situazione e, in quella occasione, lo studente si accorga che quello suo non è affatto condiviso dalla classe, anzi, riguarda lui solo, è isolato; per esempio gli altri non si meravigliano affatto di una proposta che lui non riesce, invece, ad accettare.

Un esempio solo: un quadrato è sempre disegnato e proposto dai libri di testo con i lati orizzontali e verticali, il rombo spessissimo con le diagonali orizzontale e verticale. Lo studente Pierino si è fatto l'idea che i quadrati *devono* essere così ed i rombi invece così, ed è convinto che la sua concezione sia la stessa di tutti i compagni di classe; crede cioè, implicitamente, che si tratti di una idea largamente anzi totalmente condivisa. Un bel giorno l'insegnante disegna un quadrato con le diagonali orizzontale e verticale, ma non lo chiama "rombo", come Pierino si aspetta, bensì "quadrato".

Pierino sussulta: il maestro si è sbagliato? Ma si accorge invece che il resto della classe accetta questa denominazione: si tratta sì di un conflitto cognitivo, ma non solo sul piano individuale "interno", bensì pure sul piano sociale perché mette Pierino in conflitto con un concetto che riteneva condiviso.

Alla base dei conflitti ci sono quindi le *misconcezioni*, cioè concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie! Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica. In un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli (3-6 anni) hanno concezioni matematiche ingenue ma profonde (Aglì, D'Amore, 1995) ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni corrette.

In un certo senso, le misconcezioni, intese come detto (concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica) non sono eliminabili, né costituiscono del tutto un danno. Sembrano un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare (ingenua, spontanea, primitiva, ...) ad una più elaborata e corretta.

3. Immagini e modelli

Appena un rapido cenno su questo complesso argomento. Poiché ho fatto riferimento, sopra, a termini come "immagine" e "modello" è bene chiarire che accetto la seguente terminologia (non totalmente condivisa, però).

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria.

L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad un certo concetto, costituisce il modello mentale (interno) del concetto stesso.

Detto in altro modo, lo studente si costruisce un'immagine I_1 di un concetto C; egli la crede stabile, definitiva. Ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni su C che non sono contemplate dall'immagine I_1 che aveva. Egli deve allora (e ciò può essere dovuto ad un conflitto cognitivo, *voluto* dall'insegnante) adeguare la "vecchia" immagine I_1 ad una nuova, più ampia, che non solo conservi le precedenti informazioni, ma accolga anche le nuove. Di fatto si costruisce una nuova immagine I_2 di C. Tale situazione può ripetersi più volte durante la storia scolastica di un allievo.

Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nei mesi o negli anni, da un'immagine ad un'altra più… potente e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali, cioè di successive immagini I_1, I_2,…, I_n, I_{n+1},… come una specie di scalata, di "avvicinamento" a C.

Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi "resiste" a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta. Un'immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare "modello" M del concetto C.

Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).

Ci sono due possibilità:

• M si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello che l'insegnante auspicava per C; l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello M corretto (quello voluto dall'insegnante) del concetto C;

• M si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un'immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere C perché la stabilità di M è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Proseguiamo nell'analisi dei modelli e del loro ruolo nell'apprendimento.

Quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C, l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*.

C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che del concetto C ci si aspetta all'interno del sapere matematico.

Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di modello intuitivo a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.

Si parla anche, talvolta, di *modelli parassiti*.

Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra numeri naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (per *schieramento*), si forma un modello parassita che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre, *deve* accrescere sempre.

Analogo è il modello parassita della divisione. Sia che venga affrontata "per contenenza" sia "per ripartizione", se non si conosce un po' di Didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un modello intuitivo che finirà con il produrre un modello parassita: in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A.

Didatticamente conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.

Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine. Insomma, la immagine - misconcezione non deve diventare modello visto che, per sua stessa natura, è in attesa di definitiva sistemazione.

Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l'insorgere di modelli parassiti.

Vediamo alcuni esempi in dettaglio.

Es. 1. Lo studente ha verificato per anni che l'operazione di moltiplicazione "aumenta il valore dei fattori"; detto in altre parole, il prodotto di due fattori è maggiore di entrambi (12 è ben più grande di 3 e di 4; e 60 è ben più grande di 12 e 5; ...). Anche le immagini figurali (di schemi rappresentativi ed operativi) offerte all'allievo per rendere accettabile ed intuitiva l'operazione di moltiplicazione confermano questa attesa intuitiva (per esempio, un maldestro uso del cosiddetto "schieramento" diffusissimo nella realtà didattica della scuola primaria). Infatti, fin dal primo ciclo elementare, l'immagine figurale della moltiplicazione, per esempio 3×4, è data da 4 file di 3 oggetti:

• • •
• • •
• • •
• • •

È evidente che una figura siffatta rinforza quell'immagine del concetto. Ma poi fatalmente arriverà il giorno in cui si deve moltiplicare quel 3 non più per 4, ma per 0,5 ed allora il modello (ormai formatosi) non funziona più e la sua supposta regola generale dell'aumento crolla; ed abbiamo il conflitto (Fischbein, 1985, 1992).

A questo punto assimilare la nuova situazione per accomodare il modello precedente ad uno nuovo non è affatto facile (in quanto caratteristica dei modelli, nei confronti delle immagini, è proprio la loro stabilità).

Si crea quindi la necessità didattica di non rendere stabile quell'immagine troppo presto, allo scopo di poterla poi ampliare successivamente, nel tentativo di costruire un modello del concetto di moltiplicazione in modo ottimale, che tenga conto dei successivi ampliamenti ai numeri non naturali.

Non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari!) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni: 18×0.25 e 18:0.25 la prima è quella che dà un risultato minore. Essi conservano il modello errato creatosi nella scuola elementare in base al quale "la moltiplicazione aumenta i valori".

Es. 2. Lo studente ha sempre diviso un numero grande per uno più piccolo; detto in altre parole, si è fatto l'immagine che il dividendo *deve* essere maggiore del divisore. Lo stesso modo in cui la divisione è proposta spinge a ciò: si tratta sempre di ripartire molti oggetti tra poche scatole o cose del genere (divisione di ripartizione); si tratta sempre di contenitori che raccolgono diversi oggetti ciascuno (divisione di contenenza). Ma ciò comporta allora che, di fronte ad un problema del tipo:

«15 amici si dividono 5 chilogrammi di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?»[3] (Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D'Amore, 1993b),

lo studente, anche delle scuole superiori (età 14-19 anni), venga spontaneamente spinto ad eseguire 15:5 [calcolando non quanti biscotti spettano a ciascun amico, ma "quanti amici a ciascun chilo di biscotti", come ebbe a commentare con ironia e consapevolezza un simpatico studente di I Liceo Scientifico di Lugo (RA) (età 14-15 anni), in occasione dell'intervista, quando lo si mise a riflettere sul suo 15:5]. Tra l'immagine intuitiva della operazione e quella poi costruita in modo più raffinato e profondo, c'è conflitto.

In situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo dell'operazione emerge sempre con energia. Si può ipotizzare infatti che, anche quando lo studente più evoluto si è costruito (con fatica) un modello corretto di un concetto C, modello assai vicino al sapere matematico, in condizioni di normalità il modello intuitivo fa sempre ancora capolino, dimostrando la sua persistenza.

[3] È uno dei problemi di una serie di 42 presentati in Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino (1983); questo articolo è a lungo discusso ed i suoi risultati sono paragonati a quelli ottenuti da me in Romagna, in D'Amore (1993b), pagg. 168-185.

Per comprendere meglio, rivediamo la questione dello studente di I liceo citato poco sopra. In situazione di routine, lo studente "cade" nella trappola tesagli dal suo stesso modello intuitivo; ma quando durante l'intervista lo richiamo restituendogli il suo testo, questa nuova situazione provoca un'attenzione diversa, più consapevole, ed una messa in causa di fatti cognitivi più forti: a questo punto non è più il modello intuitivo a dominare la scena, ma quello più raffinato, elaborato cognitivamente. Proprio la reazione sorpresa e divertita dello studente dimostra che lui stesso non si è reso conto del fatto di aver usato un modello intuitivo al posto di uno più elaborato.

Es. 3. Ancora sulla divisione. Nello stesso articolo di Efraim Fischbein del 1985 citato poco fa, compare un altro interessantissimo test che ho personalmente molto spesso utilizzato, soprattutto in occasione di incontri con insegnanti.

Esso si compone di fatto di due esercizi; ho conservato il primo del tutto inalterato, mentre ho invece ritoccato un po' il testo del secondo per far sì che avesse esattamente la stessa parte letteraria del primo:

P1. *Una bottiglia di aranciata, che contiene 0,75 l, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di 1 l ?*

P2. *Una bottiglia di aranciata, che contiene 2 l, costa 6 dollari. Qual è il prezzo di 1 l ?*

Se si dà da risolvere solo P1, celando alla vista P2, si noterà sempre tra i presenti un tempo di imbarazzo più o meno lungo. Dato poco dopo anche P2 ed evidenziato il fatto che si tratta dello *stesso* problema, molti saranno disposti ad ammettere con sincerità che, mentre il secondo problema si risolve immediatamente con la divisione 6:2, risolvere il primo con l'*analoga* divisione 2:0,75 crea forti imbarazzi.

Vediamo il commento nell'ambito del quale mi servirò di un brano che cita lo stesso Fischbein:

«Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».

Ho spesso provato a chiedere agli insegnanti ed agli studenti più maturi come avessero fatto a risolvere P1. Alcuni hanno confessato di aver considerato 0,75 come ¾ e di aver dunque proceduto nel campo delle frazioni (non operando sempre in modo ineccepibile). Altri hanno invece ammesso di aver risolto P1 con la proporzione $0{,}75 : 2 = 1 : x$ e di aver poi applicato le note proprietà per risolvere (con successo). Ora, si badi bene, nel corso della risoluzione di questa equazione lineare nell'incognita *x*, c'è un momento in cui si *deve* fare 2:0,75, cioè apparentemente la stessa operazione che, se eseguita direttamente sui dati del problema, avrebbe risolto P1 in un battibaleno. Ma non è la stessa cosa! Se è vero, com'è indiscutibilmente vero, che c'è una forte resistenza in moltissimi di noi ad eseguire direttamente 2:0,75 (a causa del contrasto tra significato formale e significato intuitivo della divisione), non c'è più alcun imbarazzo ad applicare le regole delle proporzioni ed a eseguire i *passaggi di un algoritmo*, quando questo arriva al momento finale di chiederci di eseguire *l'apparentemente stessa* operazione. Qui, come ormai sappiamo, scatta una clausola del contratto didattico, quella di *delega formale*: in un certo senso, non ci impegniamo più direttamente nel fare quel passaggio, non è più una questione di scelta, di decisione personale.

A quel punto stiamo solo seguendo una procedura che consiste in una serie di passaggi automatici, per i quali abbiamo avuto consenso e delega, e per i quali non dobbiamo più darci, dentro di noi, una giustificazione passo-passo.

La cosa, bisogna ammetterlo, è di straordinario interesse.

Es. 4. L'addizione. Raccogliendo un'idea di Gérard Vergnaud (1982),[4] Fischbein la considera un ulteriore esempio di non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo. Si tratta di 3 problemi additivi, a una tappa, cioè che si risolvono con una sola operazione. Li riporto per intero, per comodità del lettore:

P.A Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?

P.B Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti franchi aveva all'inizio?

P.C Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

Tutti e tre i problemi, è ovvio, si risolvono con la stessa operazione 4+7; ma essi hanno percentuali di successo incredibilmente diverse.

P.A è ben risolto già in seconda primaria (all'età di 7 anni): i risolutori arrivano a sfiorare il 100%. Qui, d'altra parte, c'è perfetta coincidenza fra *significato formale* e *significato intuitivo*: l'addizione è l'operazione che risolve problemi di unione tra raccolte (prive di elementi comuni). Ma quasi nessuno degli stessi ragazzi risolve P.B e quei pochi che lo risolvono più o

[4] Si tratta dello studio di una terna di problemi, famosissima, che appare citata in moltissimi testi; è presente e discussa anche in D'Amore (1993b).

meno tirano a indovinare: dopo tutto ci sono solo due dati numerici a disposizione, 4 e 7 ...;
P.B è risolto, anche se con difficoltà, in quarta o quinta primaria (all'età di 9 o 10 anni); diciamo che, comunque, le soluzioni corrette ottenute con consapevolezza raggiungono una discreta percentuale;
P.C è causa di un insuccesso pressoché totale. Ancora in prima e seconda media (all'età di 11 o 12 anni), P.C ha percentuali di risoluzione solo di circa il 25%, o anche meno, in accordo con le prove fatte da Vergnaud e da Fischbein.

Tuttavia è ovvio che qui non si tratta solo di significati formali ed intuivi dell'addizione. Qui si tratta anche e forse soprattutto di difficoltà di gestione "narrativa" del testo. [E questo aprirebbe l'importante questione della stesura del testo dei problemi, per la quale rinvio a D'Amore (1993b); D'Amore, Franchini et al. (1995)].

Questo tipo di prove, da un punto di vista didattico applicativo, evidenziano per lo meno che è falso quel supposto criterio di difficoltà della risoluzione dei problemi in base al quale l'aumentare del numero di operazioni da eseguire nella risoluzione è sinonimo di aumento della difficoltà. È facilmente provabile che vi sono molti problemi che richiedono due operazioni assai più facili da risolvere che non P.B; P.C, poi, con la sua pur unica operazione, resta fuori della portata dell'intera scuola elementare...

La resistenza all'uso dell'addizione in situazioni considerate di non congruenza tra significato formale e significato intuitivo, sono testimoniate non solo nella primaria, ma anche in tutta la scuola media. Si veda, per esempio Billio et al. (1993); ivi si analizzano anche situazioni esplicitamente denunciate da allievi in opportune interviste.
Es. 5: La sottrazione. La sottrazione, poi, *per sua stessa natura*, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti ancora da Fischbein:
1. Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?
2. Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per poter partecipare ad un torneo. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?

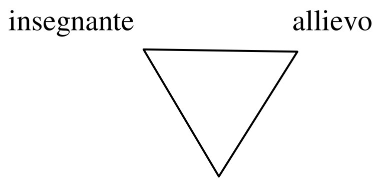
È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con una sottrazione; ma nel primo caso, quello del *togliere via* (come lo chiama Fischbein), la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo: 7+…=10, intendo in qualche modo che quei puntini … de-

vono valere 3. D'altra parte è additiva ogni strategia di "complemento a", come, per esempio, l'operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo a passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte scorrette; al posto della sottrazione, c'è chi fa l'addizione 7+10 o 10+7 legata al fatto che c'è la parola *aggiungere* che suggerisce l'uso dell'addizione.
C'è un forte contrasto tra l'operazione ingenua e spontanea di conteggio che verrebbe di fatto ad essere usata in una situazione concreta (cioè il conteggio: 7+1+1+1, con la risposta 3 legata al numero dei +1 necessari per giungere a 10) ed il significato formale della sottrazione. Se esistesse un'operazione specifica che esprime il numero di quei +1 che permettono di passare da 7 a 10, probabilmente la percentuale di successo salirebbe nettamente; qualcuno potrebbe dire che quell'operazione esiste ed è proprio la sottrazione espressa da 10-7; ma le prove fatte e le considerazioni effettuate finora mostrano che *non* è questo il significato intuitivo con cui gli studenti costruiscono nel loro cognitivo la sottrazione.

E tanto ci sarebbe da dire circa una situazione, cui ho appena fatto cenno sopra, ancora più complicata legata ai *due significati intuitivi* della divisione, quello di ripartizione e quello di contenenza, entrambi corrispondenti ad un unico *significato formale*. Più volte ho incontrato insegnanti elementari che mi confessavano di trattarle a parte, come due operazioni diverse, per evitare imbarazzi nello studente.

4. Il triangolo: insegnante, allievo, sapere

Tutta la Scuola francese (e, più in particolare, Brousseau) considerano il fenomeno insegnamento-apprendimento da un punto di vista *sistemico* e non come lo studio separato di ciascuno dei suoi componenti. In quest'ottica, in lavori di Yves Chevallard a partire dal 1982 viene proposto allo studio un modello del *sistema didattico*, formato da tre componenti: insegnante, allievo e sapere (accademico, ufficiale, universitario), che si usa chiamare: *triangolo della didattica*.



È chiaro che l'insegnante si trova implicato in una serie di rapporti di estrema delicatezza. Da un lato deve operare una *trasposizione didattica dal sapere (che sorge dalla ricerca) al sapere insegnato (quello della pratica in aula*, dal punto di vista dell'insegnante) (Chevallard, 1985).

In realtà, il passaggio è molto più complesso perché va dal *sapere matematico* al *sapere da insegnare* al *sapere insegnato*.

La trasposizione didattica consiste quindi nell'estrarre un elemento di sapere dal suo contesto (universitario, sociale eccetera) per riambientarlo nel contesto sempre singolare, sempre unico, della propria aula.

In questo lavoro, l'insegnante non è mai un individuo isolato. È di fatto il collettivo, l'istituzione che oggettivizza e definisce nella sua specificità il sapere scolare, i suoi metodi, la sua razionalità.

La trasposizione didattica produce allora un certo numero di effetti: semplificazione e dedogmatizzazione, creazione di artefatti o produzione di oggetti totalmente nuovi.

In effetti, la scuola non ha mai insegnato dei saperi puri ma dei *contenuti d'insegnamento*, qualche cosa che ha esistenza solo all'interno della scuola e che non ha solitamente un'immediata corrispondenza né con la sfera della produzione né con quella della cultura. Dal momento in cui entra in un programma scolastico, un dominio del sapere, un concetto, subiscono una trasformazione massiccia, sono snaturati per trovare un altro statuto, entrano in un'altra logica, in un'altra razionalità.

Il concetto di *trasposizione didattica* sembra essere anche per il futuro di notevole importanza intesa come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione, come ho detto, del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone.

Dall'altro lato, però, l'insegnante deve tener conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale, cioè della *noosfera* in cui si trova ad agire.

Per noosfera si può intendere il luogo dei dibattiti di idee significative sull'insegnamento, le finalità della scuola, gli scopi della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali); la noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola); si potrebbe pensare come «la cappa esterna che contiene tutte le persone che nella società pensano ai contenuti ed ai metodi di insegnamento» (Godino, 1993).

C'è anche un legame tra noosfera e contratto didattico, in quanto su alcune clausole del cd ha certo influenza diretta l'ambiente nel quale ci si trova ad operare. Su questo importante argomento, mi limito qui a questo breve cenno.

5. Ostacoli

Non è facile formarsi concetti; ciò perché ogni concetto, anche semplice in apparenza, è circondato da un intorno fluttuante e complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto (Giordan, De Vecchi, 1987).

Dunque il primo problema è quello di “ripulire” il concetto da questo alone che sembra nasconderne il significato intimo. E poi c'è da tener presente gli *ostacoli* che si frappongono all'apprendimento, proposti una prima volta da G. Brousseau nel 1983; concetto che aveva ripreso da studi filosofici di Gaston Bachelard.

Vediamo di che si tratta: ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Egli distingue tre tipi di ostacoli:
- di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica.

- Ostacoli ontogenetici

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto all'acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico da parte dell'insegnante e possono costituire quindi ostacoli di *natura ontogenetica* (l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica).

Per esempio, si rivela fallimentare ogni tentativo di introdurre dimostrazioni in seconda o terza media (età degli allievi 12-14 anni), al momento di presentare il teorema di Pitagora; ciò costringe gli insegnanti a sostituire la “dimostrazione” con una “prova” a volte concreta. Si ritiene generalmente che questo fallimento sia legato all'età degli studenti ed alla loro immaturità critica.

Ancora per esempio, si rivela fallimentare tentare di introdurre nella scuola elementare il connettivo logico "implicazione": se A allora B, per lo stesso motivo.

- Ostacoli didattici

Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Un esempio di ostacolo didattico è la presentazione che fanno taluni insegnanti della scuola elementare al momento di presentare gli oggetti infiniti: il segmento come infinità di punti, la retta come figura illimitata. Il modello più diffuso nelle scuole è quello del segmento come una collana di perline che, per la sua immediatezza, viene subito accettato dagli studenti e diventa modello intuitivo; esso costituisce un evidente ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità, nella stessa scuola elementare ed ancora di più nella scuola media, e quando si deve introdurre l'idea di continuità nella scuola superiore. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che gli studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come collana di perle. Quanto alla retta come figura illimitata, essa ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli studenti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che pure crea gravi ostacoli didattici nei corsi successivi.

- Ostacoli epistemologici

Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della Matematica, dalla sua accettazione critica nell'ambito della Matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere.

Quando nella storia della evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

Ad esempio, l'infinito matematico costituisce certo un ostacolo epistemologico; basti ripercorrerne la storia all'interno della matematica per rilevare le lotte, le discussioni, le rotture che ha determinato la sua accettazione dal momento in cui Zenone di Elea (V-VI sec. a. C.) introdusse i suoi celebri paradossi, fino alla condanna di Aristotele di Stagira (III sec. a. C.) dell'infinito attuale e su su fino alla completa accettazione, grazie all'opera di Georg Cantor (a cavallo tra i secoli XIX e XX). Dal punto di vista didattico, la cosa è stata ampiamente studiata nel contesto internazionale.

Lo zero pure costituisce ostacolo epistemologico; esso era assente presso tutte le popolazioni antiche, compresi Greci e Romani, ed apparve solo nel VI sec. d. C. in India; fu divulgato grazie alle opere del mondo arabo attorno al IX sec. d.C.; ma la sua presenza in opere europee dei secoli XIII e XIV fu molto ostacolata e causa di furibonde lotte. Una piena accettazione dello zero come vero e proprio numero è tarda e si può forse far risalire al secolo XVI. Dal punto di vista didattico, è ben noto che lo studente vede lo zero come numero "speciale" e difficilmente lo domina.

I numeri interi, quelli dotati di segno e che a scuola si usa chiamare "relativi", fanno la loro comparsa solo nel VI sec. d. C. in India ed hanno una storia analoga a quella dello zero ma ancora più osteggiata e tardiva. Inutile ricordare come, dal punto di vista didattico, vi siano molte difficoltà, da parte degli studenti, a darsi ragione del funzionamento di tali numeri. Esempio classico è la stranezza del fatto che il prodotto di due negativi è positivo.

Riassumendo, l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua maturità (da tanti punti di vista), quello didattico alla scelta strategica del docente, quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento.

Quando ed in occasione di quali idee matematiche è probabile che si abbia un ostacolo epistemologico?

- Si ha quasi certamente un ostacolo epistemologico a proposito di quelle idee per le quali nell'analisi storica di essa si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa;
- si ha un ostacolo epistemologico a proposito di un'idea quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini attorno a quell'idea.

La ricerca degli ostacoli va allora fatta contemporaneamente, e questo legame è interessantissimo:

- ♦ a scuola, nella pratica didattica;
- ♦ nello studio della storia della Matematica,

congiungendo l'una ricerca con l'altra.

È di estremo interesse la posizione secondo la quale, come scrive Federigo Enriques (1942),[5] l'errore «non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, [ma] s'introduce nel momento delicato del loro raccordo». L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.

Dunque non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma della evidenziazione di ostacoli nel senso sopra citato. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in Didattica della matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo.

Questo tipo di studi è di grande fascino ed ha già dato molti interessanti frutti; qui non posso che sorvolare.

Bibliografia

F. Aglì, B D'Amore (1995), *L'educazione matematica nella scuola dell'infanzia*, Milano, Juvenilia.

S. Baruk (1985), *L'âge du capitain*, Paris, Seuil.

R. Billio, S. Bortot, I. Caccamo, M. Giampieretti, C. Lorenzoni, R. Rubino, M. Tripodi, (1993), Sul problema degli ostacoli intuitivi nell'uso dell'addizione, *La matematica e la sua didattica,* 4, 368-386.

G. Brousseau (1983), Obstacles Epistémologiques en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198. [Ma l'inspirazione filosofica di questa idea si può certo far risalire a G. Bachelard, *La formation de l'ésprit scientifique*, 1938].

G. Brousseau (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Y. Chevallard (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble: La Pensée, Sauvage.

Y. Chevallard, M. A. Joshua (1982), Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3, 1, 159-239.

B. D'Amore (1993a), Il problema del pastore. *La vita scolastica*, 2, 14-16.

[5] Per rintracciare questo articolo nella letteratura, bisogna cercare come autore Adriano Giovannini, lo pseudonimo che Enriques fu costretto ad usare sotto il regime fascista, per fuggire alle persecuzioni razziali e soprattutto per poter continuare a pubblicare, cosa che gli era allora proibita. Si ha allora la citazione (Giovannini, 1942).

B. D'Amore (1993b), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Milano, Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].
B. D'Amore (1999), *Elementi di Didattica della matematica*, Bologna, Pitagora.
B. D'Amore (2001), *Didattica della matematica*, Bologna, Pitagora.
B. D'Amore, D. Franchini, G. Gabellini, M. Mancini, F. Masi, A. Matteucci, N. Pascucci, P. Sandri (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 18A. 2. 131-146.
B. D'Amore, B. Martini (1997), Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.
B. D'Amore, P. Sandri (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La Matematica e la sua didattica*, 3, 348-353. Ristampato in: A. Gagatsis (ed.), *Didactiché ton Mathematicon*, Erasmus ICP 93G 2011/II, Thessaloniki 1994, in greco 247-252, in francese 579-584.
B. D'Amore, P. Sandri (1998), Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-18. Traduzione francese in: *Scientia Paedagogica Experimentalis*, Belgio, XXXV, 1, 1999, 55-94.
B. D'Amore, P. Sandri (1996), Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 19A. 3. 223-246.
A. De La Garanderie (1980), *Les profils pédagogiques*, Paris, Le Centurion.
M. Deri, M. Sainati Nello, M. Sciolis Marino (1983), Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6, 6, 6-27.
J. Filloux (1973), *Positions de l'enseignant et de l'enseigné*, Paris, Dunod.
E. Fischbein (1985), Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bologna, Zanichelli, 122-132.
E. Fischbein (1992), Intuizione e dimostrazione. In: E. Fischbein, G. Vergnaud, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, a cura di B. D'Amore, Bologna, Pitagora. 1-24.
A. Giordan, G. De Vecchi (1987), *Les Origines du Savoir*, Delachaux et Niestlé, pag. 178.
A. Giovannini (F. Enriques), (1942), L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, IV, 22.
J. D. Godino (1993), La metafora ecologica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2, 2, 69-79.
P. Meirieu (1987), *Apprendre... oui, mais comment?* Paris, ESF.
A. H. Schoenfeld (1987a), *What's all the fuss about metacognition?* In: A. H. Schoenfeld (ed.) (1987b), 189-215.

A. H. Schoenfeld (ed.) (1987b), *Cognitive science and mathematics education.* Hillsdale (N.J.), Lawrence Erlbaum Ass.
G. Vergnaud (1982), *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. In: Carpenter T.P., Moser J..M., Romberg T.A. (eds.), 39-59.